← previous index next →

Source: http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partxii.htm

Unifikacija sistema linearnih jednačina, Inverza matrice i linearno programiranje

Ovaj sajt proširuje postojeće jednosmerne veze između rešavanja linearnih sistema jednačina, inverze matrice i linearnog programiranja. Dodatni linkovi osposobljavaju korisnika da razume celokupnost i mnogobrojnost ovih tema. On takođe pomažu korisniku da modelira i reši problem oblikovan kao bilo koja od pomenutih tema, tako što im je omogućen pristup rešavaču u kompjuterskom paketu. Ciljevi su teoretska unifikacija, kao i napredovanje u aplikacijama. Ovde su predstavljeni ilustrovani numerički primeri.

Profesor Husein Aršam

Za pretragu sajta, pokušajte Edit | Find na stranici [Ctrl + F]. Upišite reč ili frazu u prostor za pisanje, npr. “inverzan” ili “jednačina”, a ako prvo pojavljivanje reči/fraza nije ono što ste tražili, pokušajte Find Next.

MENI

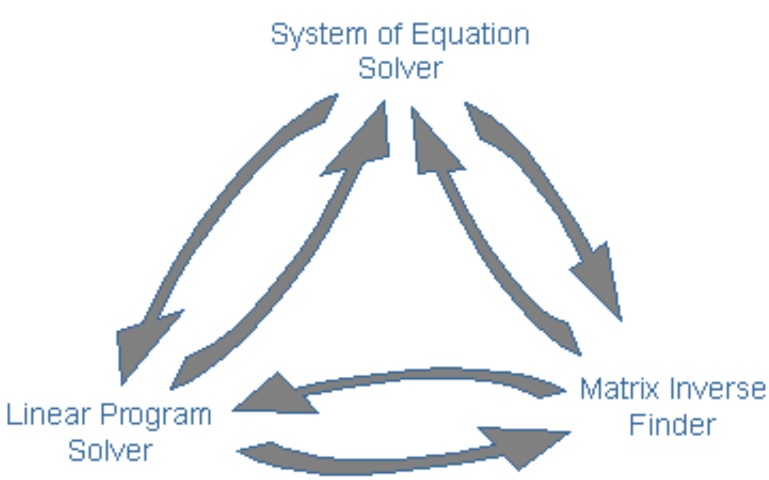
Saradnički sajtovi:

*Preuzimanje rešavača za linearnu optimizaciju

* Nauka uspeha
*Lidersko odlučivanje
*Linearno programiranje (LP) i strategija postizanja ciljeva
* Algoritmi rešenja LP za veštačke varijable
*Celobrojna optimizacija i mrežni modeli
*Alatke za LP modelarnu validaciju
* Klasičan simpleks metod
*Nulta suma sa aplikacijama
*Koncepti i tehnike učenja preko kompjutera
*Iz linearne u nelinearnu optimizaciju sa poslovnim aplikacijama
*Izgradnja područja osetljivosti za LP modele
*Predanje o nuli u četiri dimenzije
*Probabilističko modeliranje
* Sistemska simulacija
*Poslovne ključne reči i fraze
*Pregled web sajt magazina
* Zbirka JavaScript E-labs objekata učenja
*Izvori nauke o donošenju odluka

Uvod

Linearno programiranje (LP), linearni sistem jednačina i inverza Matrice često su najomiljenije teme, kako za instruktore, tako i za učenike. Sposobnost rešavanja ovih problema metodom pivotiranja Gausa Žordana (GJP), rasprostranjena dostupnost softverskih paketa i njihova široka primena čine ove teme pristupačnim čak i za učenike sa relativno slabim matematičkim zaleđem. Tipični tekstovi o LP temi obično imaju poseban odeljak za svaku od tema. Ipak, odnosi između ovih blisko povezanih tema često nisu uopšte predstavljeni ili nisu detaljno obrađeni. Ovaj članak proširuje postojeće jednosmerne veze izmeđovih tema kako bi se izgradio iscrpan dvosmerni odnos kao na prikazanoj slici. Za svaku temu prikazano je kako bi problem mogao biti modeliran i rešen putem bilo koje od združenih metodologija.



Comprehensive links among
System of equations, Matrix inversion, and Linear program

Dodatne povezanosti koje su ovde predstavljene osposobljavaju korisnika da razume, modelira i reši problem oblikovan kao bilo koja od pomenutih tema, ako ima pristup kompjuterskom rešavaču. Ciljevi su teoretska unifikacija, kao i napredovanje u aplikacijama. Sledećih šest poglavlja pokazuju povezanosti koje su ilustrovane malim numeričkim primerima. Iako su neki od njih dobro poznati, ovde smo ih uključili radi sveobuhvatnosti.

Rešen LP problem uz pomoć rešavača za sistem jednačina

Ovaj odeljak je verovatno među najpoznatijima s obzirom da su mnogi uvodi u Simpleks metod linearnog programiranja (LP) razvijeni uz pomoć sistema pristupa linearnih jednačina.

Koordinate najviših tačaka su osnovno izvodljivo rešenje za sisteme jednačina dobijenih postavljanjem nekih ograničenja na obavezujuće pozicije (tj. jednakost). Za ograđenu izvodljivu oblast broj najviših tačaka je kombinatorni Cpk gde je p broj ograničenja, a q broj promenljivih. Stoga, uzimajući bilo koje q jednačine i rešavajući ih simultano, dobija se osnovno rešenje (ako postoji). Umetanjem ovog osnovnog rešenja u ograničenja drugih jendačina, može se proveriti izvodljivost osnovnog rešenja. Ako je izvodljivo, onda je to rešenje osnovno izvodljivo rešenje koje daje koordinate tačke preseka izvodljive oblasti.

Svako rešenje bilo kog sistema jednačina naziva se Osnovno rešenje (BS - Basic Solutions). Osnovna rešenja koja su izvodljiva nazivaju se Osnovna izvodljiva rešenja (BFS - Basic Feasible Solutions). Najviše tačke grupe S jesu BFS.

Pretpostavimo da imamo sledeći LP problem sa svim promenljivima neograničenima u znaku:

Max X1 + X2

što podleže:
X1 X2³ 10+
X1£ 8
X2 £ 12

Za ilustraciju postupka stavite sva ograničenja na njihove obavezujuće pozicije (tj. jednakosti). Rezultat je sledeća grupa od 3 jednačine sa 2 nepoznate:

X1 + X2 = 10
X1 = 8
X2 = 12

Ovde imamo da je p = 3 jednačine q = 2 nepoznate. U smislu “binomnog koeficijenta” postoje najviše C32 = 3! / [2! (3-2)] = 3 osnovna rešenja. Rešavajući tri rezultantna sistema jednačina dobijamo:

X1	X2	X1 + X2
8	2	10
8	12	20*
-2	12	10

Optimalno rešenje je X1 = 8, X2 = 12, sa optimalnom vrednošću 20.

Za detalje i više numeričkih primera posetite sajt Algoritmi rešenja za LP modele.

Sistem rešenja jednačina uz pomoć LP rešavača

Pretpostavimo da imamo sistem jednačina koje bismo želeli da rešimo i da imamo LP rešavač, ali ne i dostupan rešavač za sistem jednačina. Da biste ove jednačine rešili kao LP problem, dodajte fiktivnu funkciju svrhe, dok generalno pretpostavljamo da su varijable neograničene u svom znaku. Ovo zamenjuje Xi = yi - z, svuda. Ova zamena se mora izvesti, s obzirom da mnogi LP paketi kao što su LINDO i QSB uzimaju promenljive kao ne-negativne.

Na primer, da bi se rešio sledeći sistem jednačina

2X1 + X2 = 3
X1-X2 = 3

Prebaciti u LP problem:

Max (ili min) fiktivno, npr. Max (ili min) z,
što podleže:: 2y1 + y2 - 3z = 3, i y1 - y2 = 3

Koristeći bilo koji LP rešavač kao što je LINDO, nalazimo da je optimalno rešenje: y1 = 3, y2 = 0, z = 1. Dakle, rešenje prvobitnog sistema jednačina je: X1 = 3 -1 = 2, X2 = 0 - 1 = -1.

Rešavanje za inverze Matrice koristeći LP rešavač

Da bismo pronašli inverzu za matricu AnXn, rešavamo serije n LP problema kako bismo pronašli inverzu kolonu po kolonu. Na primer, da bismo našli prvu kolonu inverze matrice, rešiti:

Max fiktivno
što podleže: AX - z [SA1j, SA2j, ... , Sanj] T = (1, 0, 0, ... 0) T

Prva kolona A-1 je tada (X1 * - * z, X2 * - з ... *, Xn * - * z) T

Pretpostavimo da želimo da pronađemo inverzu sledeće matrice (ako postoji):

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Da biste pronašli prvu kolonu A-1 upotrebite LP rešavač da rešite

Max fiktivno

što podleže:: 2X1 + X2 - 3z = 1, i X1 - X2 = 0

Optimalno rešenje je X1 = 1/3, X2 = 1/3, и з = 0. Dakle, prva kolona A-1 je [1/3 - 0, 1/3 - 0] T = [1/3, 1/3] T. Da biste izračunali drugu kolonu rešite

Max fiktivno

što podleže: 2X1 + X2 - 3z = 0, i X1 - X2 =1

Optimalno rešenje je X1 = 1, X2 = 0 и z = 2/3. Dakle, druga kolona A-1 je [1 - 2/3, 0 - 2/3] T = [1/3, -2 / 3] T. Dakle, inverza matrice je:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{matrix}$$

Napomena: Matrica koja poseduje inverzu zove se **nesingularna** ili invertibilna. Matrica se naziva singularnom ukoliko nema inverzu. Na primer, sledeća matrica je singularna:

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Dakle, u primenjivanju gore navedenog postupka za inverzu matrice, ako je matrica singularna, tada ne postoji optimalno rešenje.

Rešavanje LP problema uz pomoć rešavača inverze matrice

Da bismo rešili LP problem, pronalazimo da je inverza svake osnovne matrice sa odgovarajućim brojem neiskorišćenih/suvišnih promenljivih jednak nuli. Tada je X = B - 1 b, i sada koristimo objektivnu funkciju. Pretpostavimo da želimo da rešimo sledeći LP problem koristeći rešavač inverze.

Max X1 + X2

što podleže:
X1+ X2 ³ 10
X1 £ 8
X2 £ 12

Prvi korak predstavlja konverzija svih ograničenja nejednakosti uvođenjem neiskorišćenih/suvišnih promenljivih (ograničenja jednakosti, ukoliko ih ima, ostaju nepromenjena), imamo:

X1 + X2 - S1 = 10
X1 + S2 = 8
X2 + S3 = 12

Zatim, pronalaženjem inverze sledeće tri matrice, dobijamo osnovno rešenje:

$S_2 = S_3 = 0$

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Njena inverza je:

$$B^{-1} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Stoga:

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \end{matrix} = B^{-1}.b = \begin{matrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{matrix}$$

$S_1 = S_3 = 0$

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Inverza je:

$$B^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Stoga:

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ S_2 \end{matrix} = B^{-1}.b = \begin{matrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{matrix}$$

$S_1 = S_2 = 0$

$$B = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Inverza je:

$$B^{-1} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Stoga:

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ S_3 \end{matrix} = B^{-1}.b = \begin{matrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{matrix}$$

Procenom objektivne funkcije za izvodljivo osnovno rešenje dobijamo optimalno rešenje koje je (X1 = 8, X2 = 12), sa optimalnom vrednošću = 20.

Rešavanje sistema jednačina koristeći rešavač za inverzu matrice

Radi kompletnosti, uključujemo dobro poznati pristup inverze matrice kako bismo rešili sistem jednačina. Za rešavanje sledećeg sistema jednačina

2X1 + X2 = 3
X1-X2 = 3

koji može biti napisan i kao jednačina matrice AX = b, tada je X =A-1.b, ako inverza postoji.

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Njena inverza je:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{matrix}$$

Stoga:

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} = A^{-1}b = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

Stoga: X1 = 2, i X2 = -1 je jedinstveno rešenje.

Pronalaženje inverze matrice koristeći rešavač za sistem jednačina

Da biste pronašli inverzu kvadratne matrice veličine n, rešite n sistem jednačina sa jediničnim vektorom kao njihovom desnom stranom. Sledeći predlozi opravdavaju ovu postavku:

Predlog 2: S obzirom da AnXn matrica ima inverzu, tada je jth kolona inverze, obeležena sa A-1.j jedinstveno rešenje za AX = lj, gde je lj jedinični vektor, gde je “1” element postavljen u jth redu, j= 1, 2...n.

Pretpostavimo da želimo da nađemo inverzu za sledeću matricu (ako postoji):

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Da bi se pronašla prva kolona A-1 rešiti:

2X1 + X1 = 1
X1 - X2 = 0

Ovo daje X1 = 1/3, X2 = 1/3. Da bi se pronašla druga kolona A-1 rešiti:

2X1 + X1 = 0
X1 - X2 = 1

Ovo daje X1 = 1/3, X2 = -2/3. Dakle, A-1 je

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{matrix}$$

Napomena: Matrica koja poseduje inverzu zove se **nesingularna** ili invertibilna. Matrica se naziva singularnom ukoliko nema inverzu. Na primer, sledeća matrica je singularna:

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Dakle, u primenjivanju gore navedenog postupka za inverziju matrice, ako je matrica singularna, tada ne postoji optimalno rešenje.

Inverza matrice: Pristup računske algebre

Standardni metod za izračunavanje A-1 za r x n matricu A je korišćenje Gaus-Žordanovog reda operacija kako bi se uprostila n x 2n proširena matrica A [A | I] u [I | C], dok je A-1 = C.

Umesto toga mi predlažemo uprošćavanje [n sa (n + 1)] proširene matrice [A | R], gde je R [n sa 1] vektor kolone sa neodređenom promenljivom r. Simbolično G-J uporšćavanje [A | R] u [I | D] donosi A-1 kao matricu koeficijenata ri u D.

Pokazano je da ovaj pristup donosi suštinske uštede i prostora i računskog vremena u odnosu na pristupe korišćene u postojećem sistemu računske algebre. Analize računske kompleksnosti zahtevanog broja operacija pokazuje da, za veliko n, predložene metode štede oko 25% u odnosu na konvencionalne metode [Aršaм 1993]. Ovo uprošćavanje se dobija otpočinjanjem svakog reda R samo jednim (simboličnim) terminom, umesto n (numeričkih) termina u svakom redu I. Jasno, ovaj pristup ima pedagošku prednost. Jedna prednost je da je, simultano, generički linearni sistem sa koeficijentom matrice A rešen, i da je A-1 pronađeno, kao što je gore opisano.

Pretpostavimo da želimo da nađemo inverzu sledeće matrice (ako postoji):

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & r_1 \\ 1 & -1 & r_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & r_1 / 2 \\ 0 & -3/2 & -r_1 / 2 + r_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & r_1 / 3 + r_2 / 3 \\ 0 & 1 & r_1 / 3 - 2r_2 / 3 \end{matrix}$$

Stoga, inverza matrice je:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{matrix}$$

Napomena: Matrica koja poseduje inverzu zove se **nesingularna** ili invertibilna. Matrica se naziva singularnom ukoliko nema inverzu. Na primer, sledeća matrica je singularna:

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Dakle, u primenjivanju gore navedenog postupka za inverziju matrice, ako je matrica singularna, tada će bar jedan red imati sve nula elemente tokom G-Ž operacija.

Objekat učenja: interaktivni online rešavači

Učenje preko kompjutera: Preporučujem sledeće sajtove za interaktivne online rešavače za razumevanje koncepata izloženih na ovom sajtu, i to izvođenjem pojedinih numeričkih eksperimenata:

Sistem jednačina i inverza matrice
Linearna optimizacija

Zaokruživanje grešaka i analiza stabilnosti

Zaokruživanje grešaka se događa usled ograničenog hardvera svakog kompjuterskog paketa. Stoga, potrebno je povesti brigu o analizi stabilnosti rešenja u odnosu na parameptre inputa. U nastavku slede tri numerička primera za Linearno programiranje, inverzu matrice i rešavanje sistema linearnih jednačina, odnosno:

Linearno programiranje: Pogledajte sledeći problem:

Max 6X1 + 4X2
što podleže:
3.01X1 + 2X2 £ 24
X1 + 2X2 £ 16 sve promenljive odlučivanja ³ 0.

Optimalno rešenje je (X1 = 3,9801, X2 = 6.0100). Ipak, optimalno rešenje za isti problem, samo sa malim promenama u ograničavajućem koeficijentu matrice, može dati potpuno drugačije optimalno rešenje. Na primer, ako promenimo 3,01 u 2,99, tada je optimalno rešenje (X1 = 8,0268, X2 = 0). To jest, uprošćavanjem jednog tehnološkog elementa-matrice za 0.66%, rešenje se drastično menja! Stoga je optimalno rešenje nestabilno, uzimajući u obzir ovaj parametar inputa.

Inverza matrice: Pogledajte sledeću matricu:

$$A = \begin{matrix} 1.9998 & 0.9999 \\ 5.9994 & 3.0009 \end{matrix}$$

Ova matrica ima pravilnu inverzu, ipak, zaokruživanjem elemenata matrice A,

$$A_r = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{matrix}$$

ona postaje singularna matrica, tj. nema inverzu.

Rešavanje sistema jednačina: Pogledajte sledeći sistem jednačina:

2.04X1 + 2.49X2 = 0,45
2.49X1 + 3.04X2 = 0,55

koja ima jedinstveno rešenje (X1 = -1, X2 = 1). Ipak, zaokruživanjem koeficijenta matrice u:

2.0X1 + 2.5X2 = 0,45
2.5X1 + 3.0X2 = 0,55

rešenje postaje (X1 = 0,1, X2 = 0,1), iznenađujuća promena.

Zaključno razmatranje

Ovaj sajt proširuje diskusiju o međusobnim odnosima između linearnog sistema jednačina, inverze matrice i linearnog programiranja, tako da se svaki može modelovati i rešiti bilo kojom od druge dve metodologije. Iako su neki od ovih linkova dobro poznati, ovaj sajt upotpunjuje linkovima koji nedostaju.

Published (Last edited): 10-09-2012 , source: http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640a/partxii.htm
← previous index next →